

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"ה

1. חשב את השטח המוגבל על ידי העקומה $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$.

2. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע חסום כדור. רדיוס הכדור קטן פי שמונה מגובה הפירמידה. מה ההסתברות שדבורה המעופפת בתוך הפירמידה תימצא בכדור?

3. הוכח, לכל $0 \leq \theta \leq 2\pi$, את אי-השוויון $\sum_{k=0}^n \sin(k + \frac{1}{2})\theta \geq 0$.

4. חשב את $\Delta = \min_{a,b \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq x \leq 3} |x^2 - ax - b|$.

5. BD הוא חוצה זווית במשולש ABC . גודלי הזוויות ADB, BAD, ABD, ACB (בסדר זה) יוצרים סדרה חשבונית. אורך הצלע AB הוא 1. מצא את אורך הגובה היורד מהקודקוד C לצלע AB .

6. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל $x > 0$, ומקיימת לכל $0 < x < \frac{\pi}{4}$ את השוויון

$$f(\tan 2x) = \tan^4 x + \cot^4 x$$

הוכח: לכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים אי-השוויון

$$f(\sin x) + f(\cos x) \geq 196$$

7. נתונה הסדרה $x_{n+1} = \frac{2 + x_n^2}{2x_n}$ עם $x_1 = 4$. האם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$? אם כן, מצא אותו.

8. מעבירים משיק לגרף הפונקציה $y = f(x)$ בנקודה $x = x_0$, ומורידים מנקודת ההשקה אנך לציר ה- x . מצא את כל הפונקציות עבורן שטח המשולש הנוצר בין המשיק, האנך וציר ה- x איננו תלוי ב- x_0 .

9. לפולינום $p(x)$ ממעלה $n > 1$ יש n שורשים ממשיים שונים x_1, \dots, x_n . הוכח:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p'(x_k)} = 0$$

10. תהי $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית, ותהי $f(x) = \det(Ax + I)$ כאשר I מטריצת היחידה. חשב את $f'(0)$.

בהבה 3 f n ה !