תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"ב

1. הוכח שלמשוואה $x^5 + x = 10$ יש שורש חיובי יחיד, והוא אי-רציונלי.

2. מצולע משוכלל בעל n צלעות חסום במעגל שרדיוסו R. ממרכז המעגל מורידים אנך באורך h_n לצלע. הוכח:
$$(n+1)h_{n+1} - nh_n > R$$

3. על אליפסה קבועה מתגלגלת ללא החלקה אליפסה חופפת לה, כך שבכל רגע שתי האליפסות משיקות וסימטריות ביחס למשיק המשותף. מצא את המקום הגיאומטרי של כל אחד ממוקדי האליפסה המתגלגלת.

4. הוכח את הזהות
$$\frac{2}{x^2-1}+\frac{4}{x^2-4}+\frac{6}{x^2-9}+\ldots+\frac{20}{x^2-100}=$$
$$=11\left(\frac{1}{(x-1)(x+10)}+\frac{1}{(x-2)(x+9)}+\ldots+\frac{1}{(x-10)(x+1)}\right)$$

5. הסדרה (x_n) מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $x_{n+1} = \dfrac{1}{4-3x_n}$, $x_1 = 1982$. האם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ קיים? אם כן, מצא אותו. נמק.

6. יהי $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_n$ פולינום שכל מקדמיו -1, 0 או 1 (לא כולם אפסים). הוכח: כל השורשים של $P(x)$ נמצאים בתחום $|x| \le 2$.

7. הוכח שלמשוואה הפונקציונלית
$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0$$
אין פתרונות רציפים $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

8. נתונה קוביה חסומה בכדור. מה ההסתברות שנקודה הנבחרת באופן אקראי (בהתפלגות אחידה) בכדור נמצאת בקוביה?

9. כל האיברים של מטריצה A מסדר 10×10 הם מספרים שלמים. ידוע של-92 מהם שארית 1 בחלוקה ב-3. הוכח: $\det(A)$ מתחלקת ב-3 ללא שארית.

10. הוכח: כל פתרון $x(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ של המשוואה הדיפרנציאלית $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2+t^4+\cos x}$ הוא חסום.

בהצלחה!