בס"ד

ז' בשבט התשע"ג
18 בינו', 13

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים התשע"ג

1. האיבר הראשון בסדרה הוא $a_1=3^{1981}$. כל איבר, החל מהאיבר השני, שווה לסכום הספרות של קודמו. מצא את האיבר העשירי a_{10}.

2. הסדרה x_n מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $x_{n+1}=4-\frac{3}{x_n}\quad,\quad x_1=\frac{6}{7}$.
האם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ קיים? נמק. אם כן, מצא אותו.

3. האלכסונים בטרפז מחלקים אותו לארבעה חלקים. שטחיהם של שני החלקים הסמוכים לבסיסים הם s_1 ו- s_2 בהתאמה. חשב את שטח הטרפז.

4. שרטט את אוסף הנקודות (x,y) במישור המקיימות את אי-השוויון $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>1$.

5. הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ ומקיימת שם $|f(x)|\le 1$.
הוכח את אי השוויון: $$\int_0^1\sqrt{1-\left(f(x)\right)^2}dx\le\sqrt{1-\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2}$$

6. הוכח: $\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+f(x)+\sqrt{1+f^2(x)}}=a$ עבור כל פונקציה $f(x)$ רציפה ואי-זוגית.

7. הוכח כי כל האפסים של הפולינום $p(z)=z^6-3z^5+5z^4-3z^2+4$ נמצאים בתחום $|z|\le 6$.

8. מטריצה ריבועית $A(z)$, שאיבריה הם פולינומים במשתנה המרוכב z, הפיכה עבור כל ערך של z. הוכח כי גם האיברים של המטריצה ההפוכה $A^{-1}(z)$ הם פולינומים ב- z.

9. תלמיד זרק כדור במהירות V_0, בזווית α מעל לכיוון האופקי. מצא את מסלול הכדור בהנחה שהתנגדות האוויר לתנועה פרופורציונית למהירות.

10. על הקוטר של מעגל שרדיוסו r מסומן קטע באורך $2l$, באופן סימטרי ביחס למרכז המעגל. משרטטים ישר אקראי החותך את המעגל, באופן הבא: בוחרים (בהתפלגות אחידה) כיוון אקראי ממרכז המעגל, ואז בוחרים (בהתפלגות אחידה) נקודה אקראית על הרדיוס בכיוון זה. הישר הניצב לרדיוס בנקודה הנבחרת הוא הישר הנבחר.
מה ההסתברות שהישר האקראי חותך את הקטע המסומן?

בהצלחה!