ב' בשבט תשע"ד
3 בינו', 14

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"ד

1. מצא פתרון כללי, עבור $a>0$, למשוואה הפונקציונלית $f(x+y)=a^{xy}f(x)f(y)$.

2. הוכח, עבור n טבעי, את אי-השוויון $\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$.

3. הסדרה x_n מוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה $x_1=2$, $x_{n+1}=\frac{4x_n-1}{2x_n+1}\quad(n\ge 1)$.
האם הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ קיים? נמק. אם כן, מצא אותו.

4. מצא ותאר את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שמהן רואים אליפסה נתונה בזווית ישרה.

5. מצא את כל הפונקציות הזוגיות ואת כל הפונקציות האי-זוגיות המקיימות את המשוואה הדיפרנציאלית $y''+\sin\left(y'\right)+y=0$.

6. פתור את המשוואה $1!+2!+\ldots+m!=n^2$ עבור מספרים טבעיים n,m.

7. מצא פונקציה $f(x)$ גזירה בקטע $0\le x\le 1$ המקיימת שם: $f'(\sin^2 x)=\cos(2x)+\tan^2 x$. צייר תרשים כללי של גרף הפונקציה.

8. יהי $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ פולינום שכל מקדמיו ממשיים וכל האפסים שלו מדומים טהורים. הוכח: כל האפסים, פרט לאחד, של הנגזרת $p'(x)$ הם מדומים טהורים.

9. יהיו $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ מספרים ממשיים שונים זה מזה ושונים מ-$0,-1,-2,\ldots,-n+1$.
הוכח:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n}\\ \frac{1}{\lambda_1+1} & \frac{1}{\lambda_2+1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{\lambda_1+n-1} & \frac{1}{\lambda_2+n-1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+n-1}\end{vmatrix}\neq 0$$

10. קטע באורך L מחולק לשלושה חלקים באופן אקראי, על ידי בחירת שתי נקודות בקטע (כל אחת בהתפלגות אחידה, באופן בלתי תלוי). מה ההסתברות ששלושת החלקים יכולים להוות צלעות של משולש?

בהצלחה!