

פשר עזרא- 'ספר העבור'

לרבי אברהם אבן עזרא
מבוא למהדורה מוערת

" וכי יכה איש את עין עבדו ועשה פסח לה' "

סמינר הלוח העברי

המחלקה למתמטיקה

ד"ר ערן רביב | ג' בטבת תשפ"ב, 07.12.2021

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University



פשר עזרא- 'ספר העבור'

לרבי אברהם אבן עזרא
מבוא למהדורה מוערת

" וכי יכה איש את עין עבדו ועשה פסח לה' "

סמינר הלוח העברי

המחלקה למתמטיקה

ד"ר ערן רביב | ג' בטבת תשפ"ב, 07.12.2021

אוניברסיטת
בר־אילן
Bar-Ilan University





מבוא

- תולדותיו של האב"ע.
- העברת הידע המדעי לאירופה ע"י מלומדים יהודים.



חיבוריו

- ספר המספר.
- ספר העבור.
- מבנה הספר.



דוגמאות וביאורן

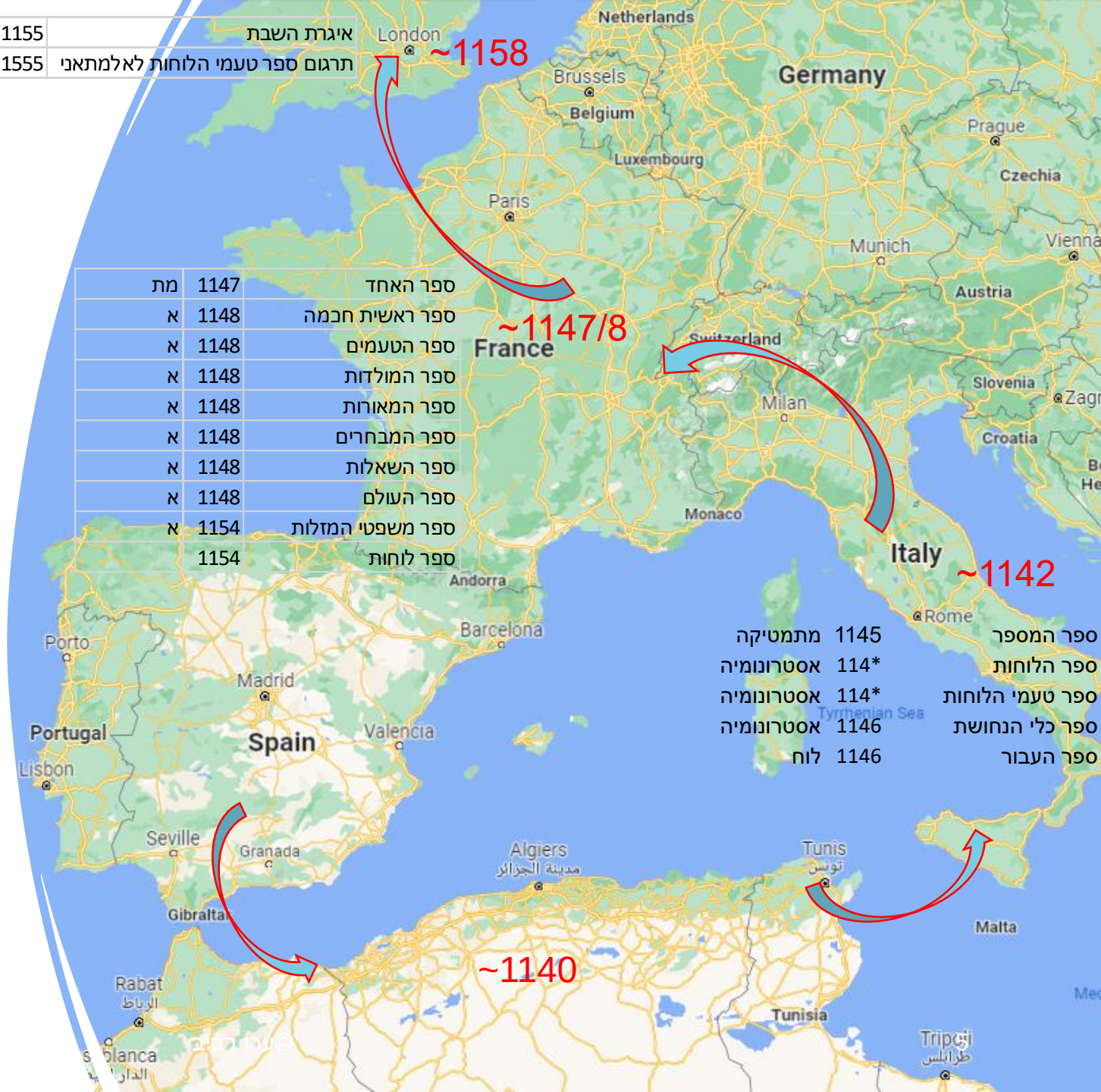
- מאזניים.
- חישוב מולד תשרי של ראש מחזור.
- חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- דרך אחרת.
- ספרת היחידות של מולד תשרי של ראש מחזור.
- חלוקת השעה ל- 1080 חלקים.



תולדותיו

- אברהם אבן עזרא נולד בספרד בסוף המאה ה-11, בשנות הארבעים לחייו נדד לצפון אפריקה ומאוחר יותר לאיטליה צרפת ואנגליה.
- לאירופה הגיע בסביבות 1140 כשהוא כבן חמישים.
- בעשרים שנות שהותו באירופה חיבר את חיבוריו המדעיים (כעשרים וארבעה חיבורים {סלע, 1999}).
- בשהותו בצרפת התיידד עם רבנו תם ושמו מאוזכר כמה פעמים בתוספות בש"ס.

	1155	איגרת השבת
אסטרונמיה	1555	תרגום ספר טעמי הלוחות לאלמטאני



העברת הידע המדעי לאירופה

במאות השביעית והשמינית לספירה עם התפשטות האסלם החלו לצמוח מרכזי יידע וספרי מדע של מלומדים בשפה הערבית.

המלומד הפרסי מוחמד אבן מוסא אל-ח'ואריזמי שעל שמו נקראת ה'אלגברה' וה-'אלגוריתם' פעל בעיקר בבגדד וחיבר כמה ספרי מדע בתחומים שונים.

בראש הגשר של העברת הידע המדעי עמד אברהם בר' חייא הנשיא ובעקבותיו צעד אבן עזרא והמשיך בהעברת הידע המתמטי/אסטרונומי מהשפה הערבית ללטינית ועברית <<לארצות אירופה שהיו בשלטון נוצרי.

•

•

•



ספר המספר

לר אברהם אבן עזרא ז"ל.

יצא לאור פעם ראשונה

סתורגם ומפורש בלשון אשכנז

מאת

משה זילבערבערנ.



פראנקפורט דסיין.

י קויפמאן.

שנת תרנ"ה י"א.

ספר המספר (איטליה 1145/6)

- חיבור מתמטי ראשון מסוגו באירופה (!) הספר נכתב באיטליה ומכיל ביאור לשיטות חיבור חיסור כפל והוצאת שורש ועוד.
- האב"ע חידש וביאר את הפעולות המתמטיות בשיטה הפוזיציונאלית שפותחה בהודו במאה השישית ואומצה ע"י הערבים (בעקבות חיבורו של אל-ח'ואריזמי שעל שמו האלגברה בראשית המאה התשיעית).
- את הספרות אב"ע מייצג בעזרת אותיות הא'-ב'.
- בין היתר האב"ע חידש מונחים עבריים לציין פעולות שונות- נדגים בהמשך.

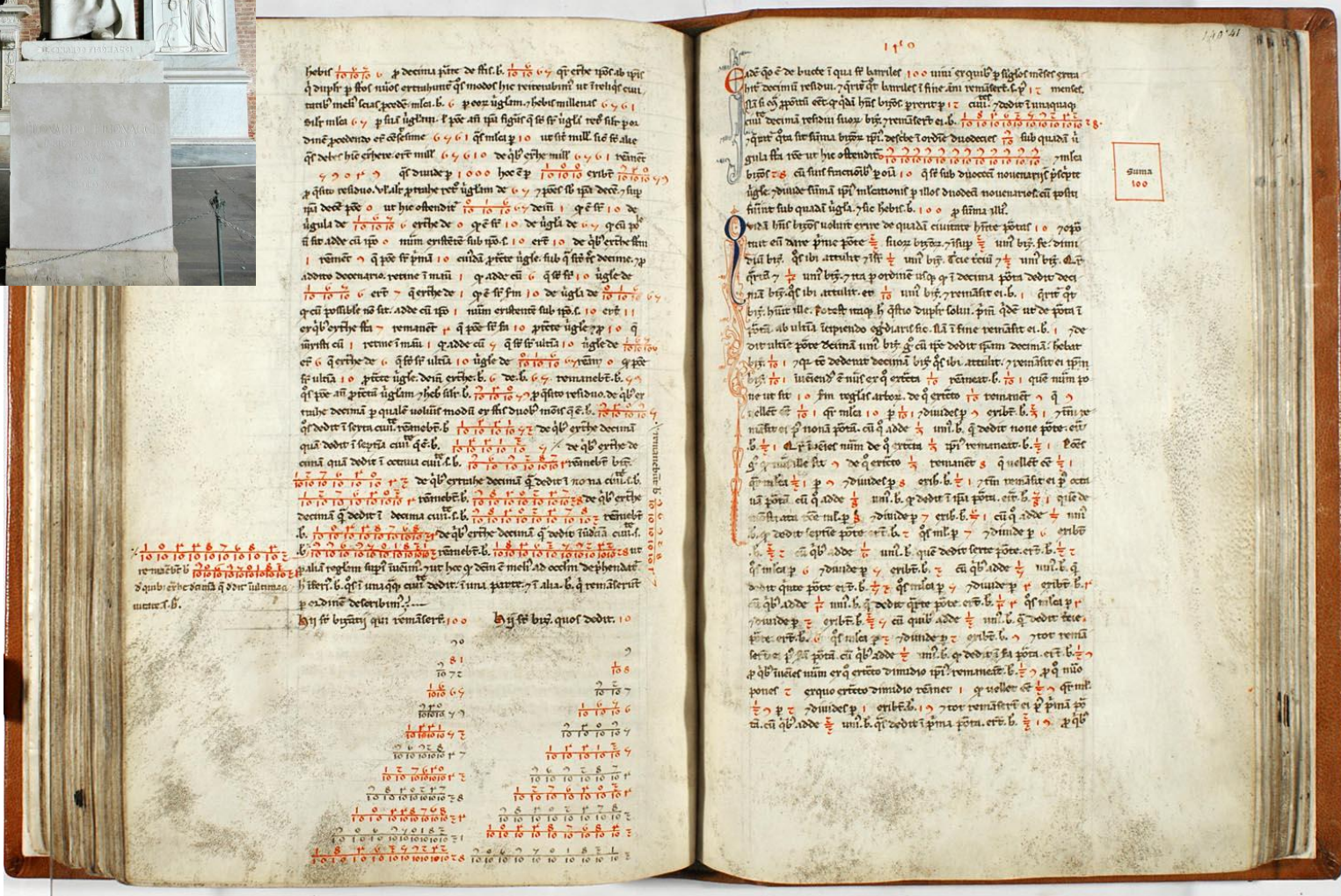


ויקפדיה

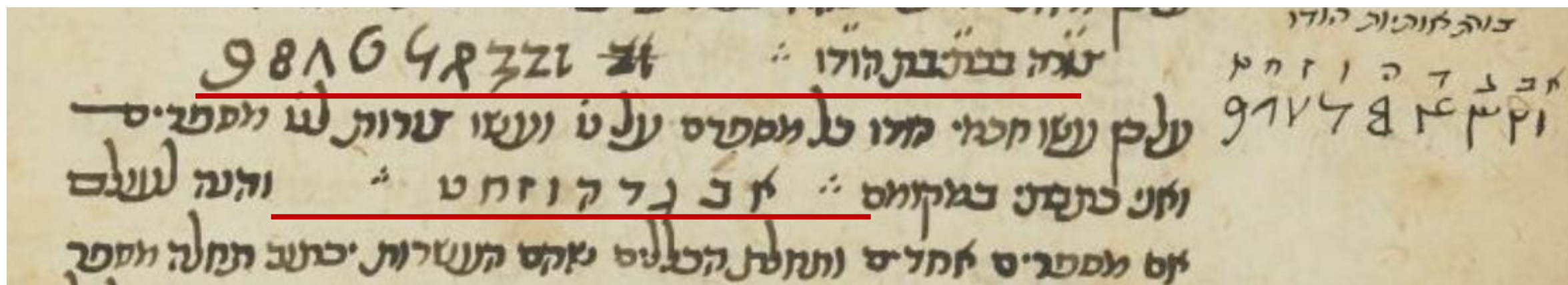
ספר החשבוניה – Liber Abbaci •

(מ-Abacus בלטינית)

- רק כעבור כחמישים שנה בשנת 1202 פיבונאצ'י (איש פיזה) פרסם את ספרו Liber abbaci אך כאמור לאבן עזרא "ראשית הבכורה" בחיבור מתמטי ראשון מסוגו באירופה.



ספר המספר – ייצוג הספרות ב- א'-ב'



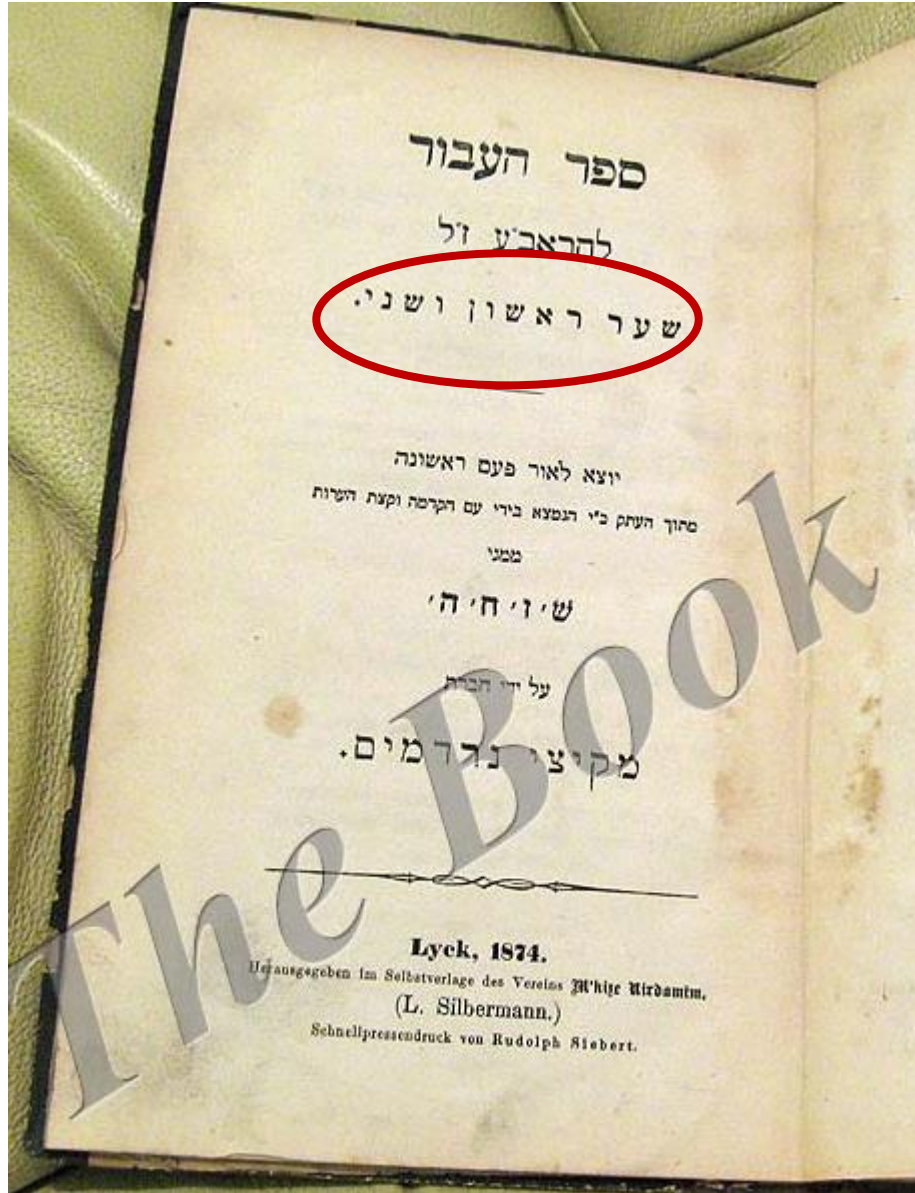
• הספרייה הלאומית של צרפת, פריס, צרפת Ms. hebr. 1052

ספר המספר - הספרה אפס

”...והנה לעולם אם יש בידך מספר באחדים לפני הכללים שהם העשרות יכתוב בתחלה מספר האחדים ואחר כך מספר הכללים. ואם אין לו מספר באחדים ויש לו מספר במעלה השנית שהם העשרות, ישים כדמות **גלגל** **○** בראשונה להורות כי אין במעלה הראשונה מספר... וזה הגלגל **○** וטעמו כגלגל, כקש לפני רוח, ואינו אלא **לשמור** המעלות, ובלשון לעז שמו סיפרא”.

(ספר המספר איטליה 1146)

ספר העבור



- הספר נכתב בוירונה בשנת 1146
- הספר מכיל אוסף "הערות" הכתובות ככתב חידה (כתיבה המאפיינת את האב"ע) העוסקות בענייני הלוח העברי הקבוע.
- הספר מכיל שלושה שערים ובמהדורת הדפוס שהוציא לאור שלמה זלמן חיים הלברשטאם בהוצאת 'מקיצי נרדמים' נמצאים רק שני החלקים הראשונים של החיבור.

ש'ז'ח'ה

- שלמה זלמן חיים הוברשטאם (ש.ח.ז.ה) ממקימי חברת 'מקיצי נרדמים' (חברה ששמה לעצמה כמטרה לההדרת והוצאת ספרי קדמונים הספונים בכתבי יד במהדורות דפוס), היה תלמיד חכם סוחר אספן ומהדיר ספרים.

- על מצבתו כתובה רק מילה אחת בודדת-

Bibliofil

כלומר אוהב ספר.



ספר העבור

- כפי שנראה בהמשך גם שני החלקים הללו בדפוס הם לא מלאים.
- בסוף המהדורה הנדפסת מופיע חלק הנקרא "סוד העבור"- נראה כחלק מחיבור עצמאי.
- בכתב יד וטיקן מופיע גם שריד מתוך החלק השלישי שלא הודפס. (Ms. Urb ebr. 48, סרט מספר F 687 דפים 56-72ב).

ספר העבור- מבנה

- בפתיחת הספר כתוב "השער האחד במולדות ובמאזניהם ובקביעות והפרשיות ובתקופת שמואל ורב אדא וחשבון הגויים".
- "השער השני בטעמי כל הכתוב בסדר אחד וסוד העבור"
- עיון השוואתי של שני השערים במהדורת הדפוס מלמד אותנו שהנוסח שיש בפנינו הוא נוסח חסר. להלן טבלה המציבה את הביאורים בחלק השני ביחס למובאות של החלק הראשון:

ספר העבור- מבנה

נושא בשער הראשון	ביאור בשער השני
חסר בדפוס	הוצרכו חכמי המזלות לחלק השעה על שישים ...
חסר בדפוס	המחזור קבלה...
חסר בדפוס	העבורים קבעו עבור...
נמצא	דרך אחרת... (מציאת מולד תשרי של ראש המחזור).
נמצא	דרך אחרת...
נמצא	מאזניים
נמצא	השירים
נמצא	הקביעות
נמצא	הפרשיות
חסר בדפוס	שבעה שערי הפשוטות
חסר בדפוס	שבעה שערי המעוברות
נמצא	תקופת שמואל
נמצא	דרך אחרת לקחת שיטת המחזורים
חסר בדפוס	תקופת רב אדא
חסר בדפוס	חשבון הגויים

דוגמאות מספר העבור



וביאור

תזכורת

טבלת יתרונות			
באותיות	חלקים	שעות	ימים
א' י"ב תשצ"ג	793	12	1
ד' ח' תתע"ו	876	8	4
ה' כ"א תקפ"ט	589	21	5
ב' י"ו תקצ"ה	595	16	2

חלקים	שעות	ימים	הגודל
793	12	29	חודש לבנה
876	8	354	שנה פשוטה *12
589	21	383	שנה מעוברת *13
595	16	6939	אורך מחזור *235
204	5	2	ב'ה' ר"ד

חישוב מולד תשרי מבוקש: (סך החודשים שבין המולדות) X יתרון חודש + מולד מוצא = מולד מבוקש

(סך החודשים שבין המולדות) X א' י"ב תשצ"ג + ב'ה' ר"ד = מולד מבוקש

דוגמא פרטית- חישוב מולד תשרי של ראש מחזור:

(סך המחזורים שחלפו) X ב' י"ו תקצ"ה + ב'ה' ר"ד = מולד מבוקש



Paul Getty Museum, Los Angeles

מאזניים



?

?

המאזנים ידוע כי שלשים מנורת שלשה כי העשרה והמאה והאלף הם כמו אחד ותווי חשבון אי"ק בכ"ר שילמדו הנערים בספרים וכן הכל והנה שקול המחזורים במאזנים השעה ונוסף עליהם ששה ונדע כמה ישארו בינינו ונעשה בן בחלקי מולר ראש המחזור אם היו כאשר ישארו בידינו חשבונינו אמת, ונקח לכל השנים שעברו מן המחזור שלשה ואם עברו מעוברות קח לכל מעוברת אחד ונתבר הכל וכן נקח לכל חדש אחד.

1. מאזניים

- בעידן החישובים הידניים יש צורך לשיטת בדיקה קלה ונוחה על מנת לאשר את נכונות החישוב.
- אב"ע חידש **לראשונה** את המונח העברי **'מאזניים'** כמונח המציין שיטת בדיקה לנכונות התוצאה של החישוב המתמטי.
- השיטה מבוססת על יצירת מספרים "קטנים" **המייצגים** את המספר המקורי. לשם כך הוא משתמש בשארית החלוקה (מודולו), השיטה עובדת כדלהלן:

$$\begin{array}{ccc} \times \begin{array}{r} ABC \\ DEF \\ \hline GHIJK \end{array} & \longrightarrow & \times \begin{array}{r} ABC(\text{mod } x) \\ DEF(\text{mod } x) \\ \hline GHIJK(\text{mod } x) \end{array} \\ \text{התרגיל המקורי} & & \text{הבדיקה} \end{array}$$

מאזניים

- דוגמא שימוש במודולו 7:

	123			123 (mod7)		4
×	456		→	456 (mod7)	×	1
	56088			56088 (mod7)		4

סכום ספרות סופי - (Digital Roots)

זיהוי שגיאות בפעולות אריתמטיות

- בסכום ספרות סופי מתעלמים מהמשקל שבו ממוקמת הספרה. הפעולה היא סכימת כל הספרות כאילו כולן יחידות כלומר חישוב סכום ספרותיו של המספר הנתון.
- חוזרים על הפעולה ומחשבים את סכום ספרותיה של התוצאה, וחוזר חלילה, עד שמתקבל מספר בן ספרה אחת. התוצאה שמתקבלת שקולה למודולו 9.
- הסבר: חיסור 9 שקול לחיסור 10 והוספת 1 (כלומר הזזת הספרה 1 ממשקל עשרות למשקל יחידות) באופן דומה חיסור 90 שקול לחיסור 100 והוספת 10 כלומר סכום ספרות סופי משמעו מודולו 9 למספר (כלומר הסרת כפולות של 9).

$$-9^k = -(10 - 1)10^k = -10 * 10^k + 1 * 10^k = -1 * 10^{k+1} + 1 * 10^k$$

k=0,1,2... כאשר

סכום ספרות סופי - (Digital Roots)

זיהוי שגיאות בפעולות אריתמטיות

- אמור מעתה אם נסמן ב- $S(.)$ פונקציה המחזירה את סכום הספרות הסופי של המספר, ו- n שלם חיובי, אזי מתקיים:

$$n(mod\ 9) = \begin{cases} S(n): S(n) \in \{1 \dots 8\} \\ 0 : S(n) = 9 \equiv 0 (mod\ 9) \end{cases}$$

- מכאן כמובן נובע שהפונקציה של סכום ספרות סופי שווה למבחן התחלקות המספר ב- 9.
- אמור מעתה, אם רצוננו לבדוק את המשוואה $a \times b = c$, נחשב את סכומי הספרות הסופיים של a, b, c הכפלת ס"ס של אלו צריכה להיות שווה לסכום ספרות סופי של תוצאת הכפל.
- כעת הסיבה לבחירת מודולו 9 כבדיקה היא ברורה כיוון שקל מאוד לחבר את סכום הספרות ללא כל צורך בביצוע תרגיל חילוק.

בלשון האבן עזרא (בספר המספר)

ו ב ח ז באחרונה במאזנים⁵). וככה תעשה חשוב כל חשבון שתמצא
בסור העליון באיוז מעלה שיהיה כאילו הם אחדים וחברם והוצא המחובר ט'
ט' אם יותר⁶ (ט'⁷) או פחות ממנו כתוב אותו לבדו והוא מאזני הסור
העליון ככה⁸) תעשה למאזני הסור השפל עד שתדע כמה המאזנים⁹ שלו
וכפול מאזני הסור העליון על מאזני הסור השפל¹⁰) והנכפל תוציאהו¹¹ (ט'
ט' והנשאר יהיה עמך שמור ואם מאזני אחד מהסורים יהיה ט' אל תייגע
עצמך לבקש מאזני הסור האחר כי ט' יצא לעולם ואחר בדוק מאזני הסור
השלישי וראה אם היה⁰ שוה לשמור חשבונך¹² (אמת¹³) ואם לאו⁰ הנה
טעית¹⁴):

×	123	→	×	6
	456			6
	56088			0

• ובדוגמא שהבאנו לעיל

הקטעים מספר העבור העוסקים במאזניים

?

המאזנים ידוע כי שלשים מנחת שלשה כי העשרה והמאה והאלף הם כמו אחד והוא חשבון אי"ק בכ"ד י"למדו הנערים בספרים וכן הכל והנה שקול המחזורים במאזנים השעה ונוסף עליהם ששה ונדע כמה ישארו בינינו ונעשה כן בתלקי מולד ראש המחזור אם היו כאשר ישארו בידינו חשבונינו אמת, ונקח לכל השנים שעברו מן המחזור שלשה ואם עברו מעוברות קח לכל מעוברת אחד ונתבר הכל וכן נקח לכל חדש אחד.

?

• ובחלק השני הוא מוסיף ביאור:

נשארו שלשה על כן אמרתי שיקח כמנין המחזורים חלקים. מאזנים טעם להוסיף ששה כי הם מאזני ר"ד חלקים שיש בראש המולדות וטעם לכל המעוברות לקחת לשנות המחזור לכל שנה נ"ג. כי הם השארים מן הקצ"ה וטעם לכל המעוברות להוסיף אחד כי התוספות לתרש אחד במאזני תשצ"ג אחד מאזנים אחרים טעם להוציא לשנות העולם בתחלת המחזור כ"ד כי

?

ספר העבור כתב יד הספריה הלאומית (דף 70)

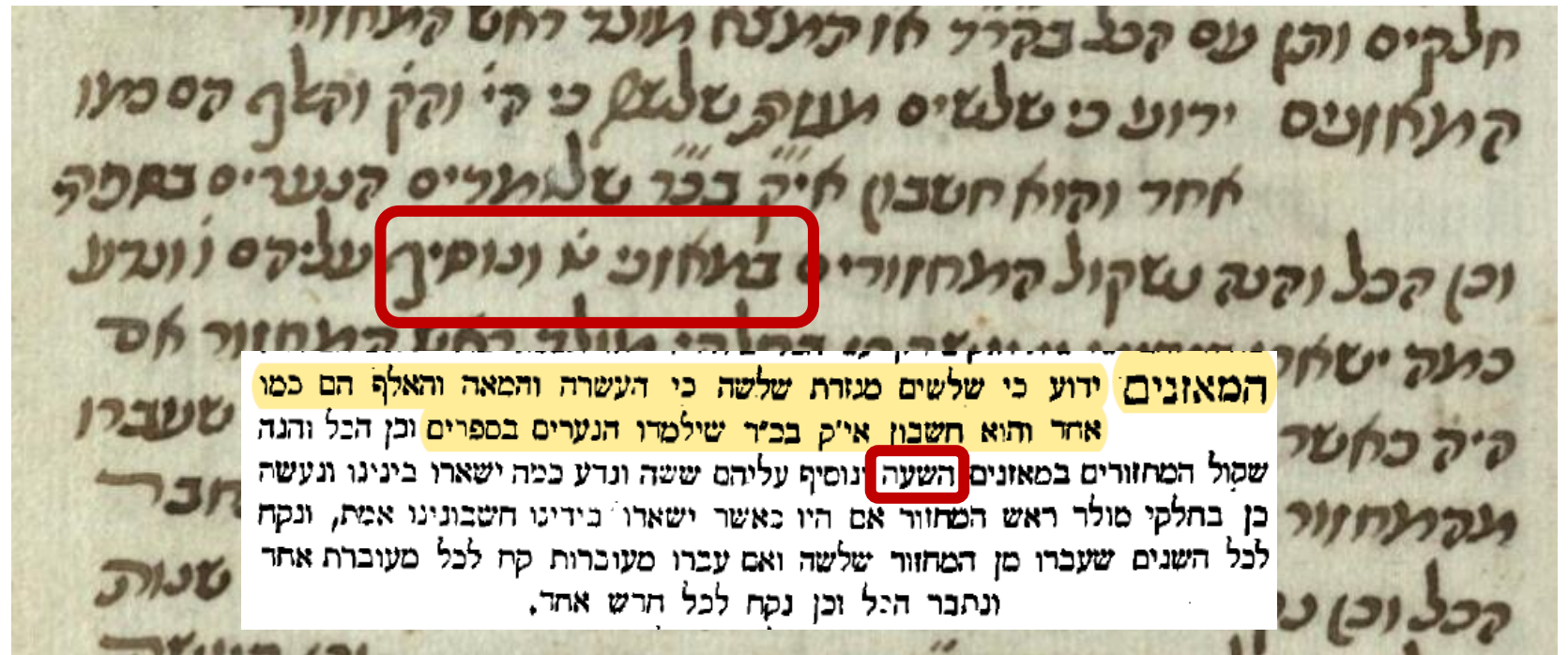
הספרייה הלאומית, ירושלים, ישראל

Ms. Heb. 8°3916

קבץ חבורים באסטרולוגיה ואסטרונומיה JER NLI 3916=8

אבן עזרא, אברהם בן מאיר, 1089-1164

מאה ט"ו



- יתכן ולפני הסופר המעתיק היה כתוב במאזני התשעה והפך (בהשמטת האות תיו) למאזני השעה.
- ויתכן שמחמת הדומות התחלפה הט' ב-ש' (מחמת הדומות).

הערכים המספריים במאזני ה-ט'

במודולו 9 מתקבלת הטבלה הבאה:

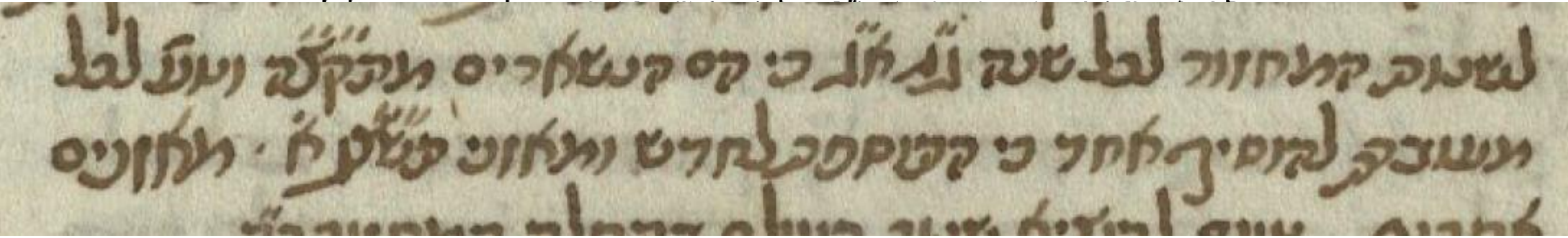
הגודל (בחלקים)	מודולו 9
שעה (1080p)	0
יום	0
חלק	1
חודש (793p)	1
שנה פשוטה (12 חודשים)	3
שנה מעוברת (13 חודשים)	4
מחזור (235 חודשים)	1
204 חלקים	6

עתה דברי האב"ע ברורים

מודולו 9	הגודל (בחלקים)
0	שעה
0	יום
1	חלק
1	חודש
3	שנה פשוטה (12 חודשים)
4	שנה מעוברת (13 חודשים)
1	מחזור (235 חודשים)
6	204 חלקים

המאזנים ידוע כי שלשים מגזרת שלשה כי העשרה והמאה והאלף הם כמו אחד והוא חשבון אי"ק בכ"ד שילמדו הנערים המהירים וכל חזנה שקול המחזורים במאזנים השעה ונוסף עליהם ששה נ"ו ע כמה ישארו בינינו ונעשה כן בחלקי מולר ראש המחזור אם היו באנו ישארו בידנו חסרוננו אמת, ונקח לכל השנים שעברו מן המחזור שלשה ואם עברו מעוברות קח לכל מעוברת אחד ונתבר הכל וכן נקח לכל חדש אחד.

נשארו שלשה על כן אמרתי שיקח כמנין המחזורים חלקים. מאזנים מעם



ומאזני תשע א'

דוגמאות לבדיקת מאזניים

- במאזניים אלו השיטה היא לקחת "בכף אחת" את סך המחזורים ועוד 6 (הנובעים מ-ר"ד החלקים) מודולו 9.

- יש לקחת "בכף שניה" את סך החלקים שקיבלנו (מהחישוב) במולד תשרי של ראש המחזור מודולו 9. (כי השעות והימים שקולים לאפס) וצריך להתקבל אותו מספר!

חלק	שעה	יום	מספר מחזור	שנה לבהר"ד
129	4	5	304	5758
724	20	0	305	5777

- עבור מחזור 304 חלפו 303 מחזורים ולכן חשבון המאזניים יהיה:

$$303*1+6=309$$

$$309 \pmod{9} \equiv 3 \quad \text{בכף אחת}$$

עתה נבדוק את סך החלקים בלבד:

$$129 \pmod{9} \equiv 3 \quad \text{בכף שניה}$$

- באופן דומה עבור מחזור 305 חלפו 304 מחזורים ולכן חשבון המאזניים יהיה:

$$304*1+6=310$$

$$310 \pmod{9} \equiv 4$$

עתה נבדוק את סך החלקים במולד תשרי של ראש מחזור ונקבל:

$$724 \pmod{9} \equiv 4$$

מאזניים אחרים- מודולו 24

מאזניים אחרים. הוצא שנות העולם בתחלת המחזור ארבעה ועשרים וכן תעשה מאתים וארבעים יצאו וכן אלפים וארבע מאות ובה ארבעת אלפים ושמונה מאות והנה לכל מאה ארבעה והוסף עליהם שנים עשר ובדוק חלקי ראש המחזור אם היו שווים לחשבונך חשבונך אמת, ואם עברו שנים מהמחזור הסתכל אם השנים שעברו הם זוגות לא תקח כלום ואם אינם זוגות קח שנים עשר וקח לכל מעוברת שעברה אחד ובכה לכל חדש שעבר אחד ובדוק חלקי המולד. ובביאור בשער שני:

אחר מאזניים אחרים טעם להוציא לשנות העולם בתחלת המחזור כ"ד כי המחזור הם י"ט והנה לכל שנה א' וטעם להוסיף י"ב כי כן ישאר מחלקי כ"ר כי הם י"ט וטעם שלא תקח לכל שנים מהם שדם זוגות כלום כי לכל שנה ששונה ישאר י"ב וטעם לקחת לכל שנה מעוברת אחד בעבור החדש הגדול ולא ישאר מחשבון השצ"ג רק אחד לבדו.

- האב"ע בחר 24 כמחלק מכיוון שמחזור מודולו 24 נותן 19 ואז ניתן להסתכל על מספר השנים שחלפו מבהר"ד כמספר חלקים, כבדוגמא שלהלן.

הגהה מסברא:

"מאזניים אחרים טעם להוציא לשנות העולם בתחילת המחזור כ"ד כי המחזור הם י"ט ~~והנה לכל שנה א'~~ וטעם להוסיף י"ב כי כן ישאר מחלקי ~~כ"ד ר"ד~~ ~~כי הם י"ט~~..."

במודולו 24 מתקבלת הטבלה הבאה:

הגודל (בחלקים)	מודולו 24
1080 חלקים	0
יום	0
חלק	1
חודש	1
שנה פשוטה (12 חודשים)	12
שנה מעוברת (13 חודשים)	13
מחזור	19
204 חלקים	12

- כיוון שמחזור במודולו 24 שקול ל-19, לכן לוקחים את סך השנים כמספר המבטא את "סכומי ה-19" שנספרו מהמחזורים.

- מוסיפים 12 – עבור בהר"ד.

- למספר שהתקבל מבצעים מודולו 24.

המספר שמתקבל צריך להיות שווה לסך החלקים של ראש המחזור (המחושב) מודולו 24. (עבור שנים בתוך המחזור מוסיפים יחידות במספר החודשים!) צמד שנים פשוטות = 0. דוגמאות:

1. 5757 – סך השנים עד סוף מחזור 303. 2. 5782 תשפ"ב, $5782 = 304 \cdot 19 + 6$ (מולד תשרי 3,5,497)

1. 5757 – סך השנים עד סוף מחזור 303.

$$(304 \cdot 19) \pmod{24} + 12 + 4 \cdot 12 + 13 \equiv 17$$

$$(5757 + 12) \pmod{24} \equiv 9$$

$$497 \pmod{24} = 17 \text{ מש"ל}$$

$$129 \pmod{24} \equiv 9$$

והחלקים-

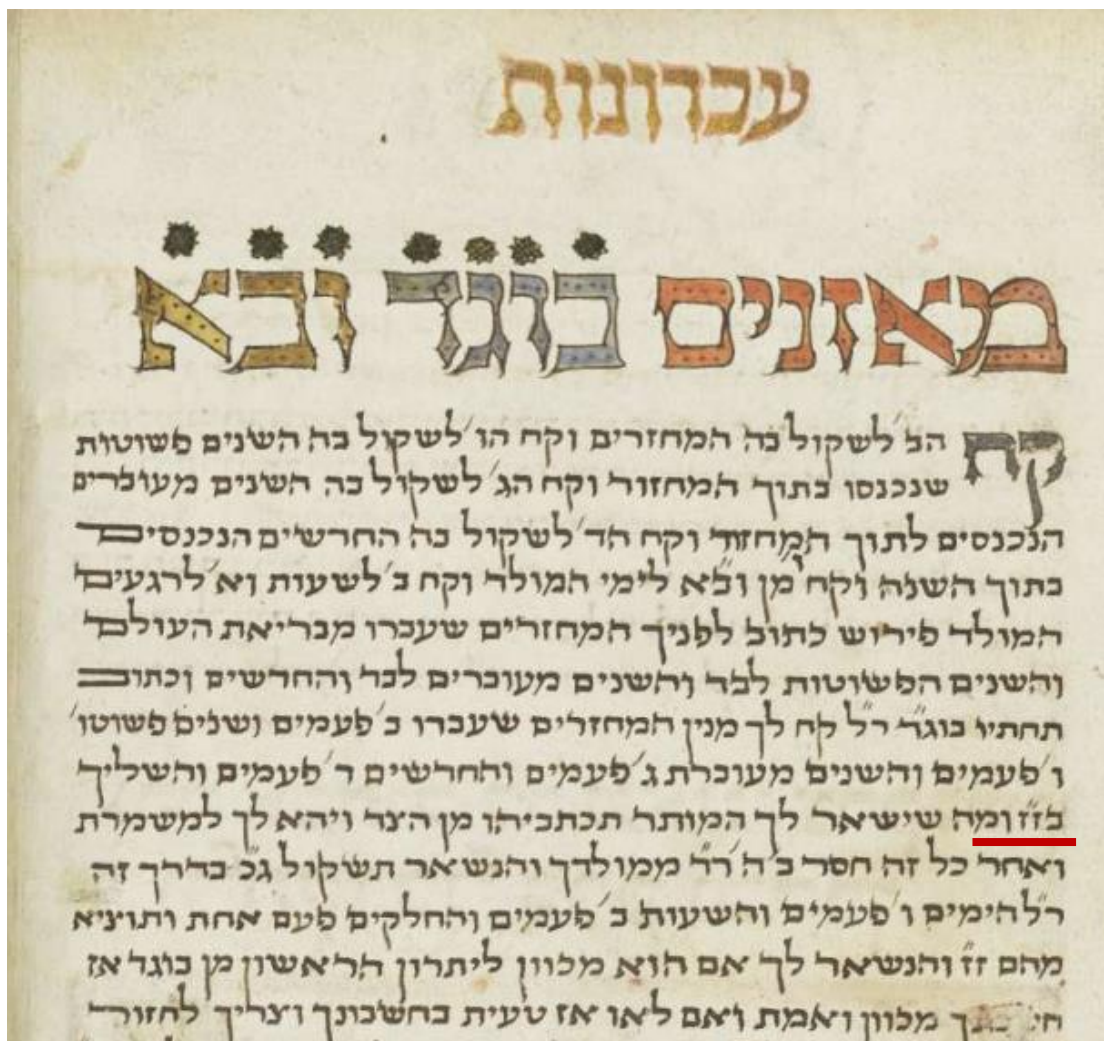
מאזני בוג"ד וב"א-

כתב יד עברונות, ברלין, Ms. or. oct. 3150



מאזני בוג"ד וב"א- מאזניים מודולו 7

כתב יד עברונות, ברלין, Ms. or. oct. 3150



- מאזניים מודולו 7 מופיע גם באבודרהם.

מודולו 7	בחלקים	הגודל
2	69715	מחזור
6	476076	פשוטה
3	515749	מעוברת
4	39673	חודש
6	25920	יום
2	1080	שעה
1	1	חלק

ב
ו
ג
ד

ו
ב
א

בחלקים	הגודל (יתרון)
56971	מחזור
611319	פשוטה
915286	מעוברת
33967	חודש

מאזני הוט"ג – מודולו 10

כתב יד עברונות, ברלין, Ms. or. oct. 3150



עברונות

בזאת המשקל תשליך חשבונך בעשירות ותשקל המחזורים והשנים
פשוטות והשנים מעוברות וחרשים שעברו עם חוטגל המחזורים
והשנים פשוטות והשנים מעוברות וחרשים שעברו עם חוטגל רל
המחזורים ה' פעמים ושנים פשוטות ו' פעמים ושנים מעוברות ו'
פעמים וחרשים ג' פעמים ותשליך ב' וחשמה לך תהא לך למשמר
וגם מן המולד תסור כה ר' ואם אין לך מקום להסיר תוסיף עד
מולדך ז' ימים וחלקים מן היתרון תשליך כמו כן בעשירות ואם
היתרון השני רומה ליתרון הראשון אז חשבונך מכון ואמר
וימים ושעות מן היתרון המולד אינו עריך לשקול לפי שאם
תעשה מן הימים שעות ומן השעות חלקים כנראי הולכי בעשירות
ואמסול לך משל כגון עתה כחדש אב בשנת תח' לפק עברו עלינו
רפ"ה מחזורים וז' שנים פשוטות ור' שנים מעוברות וי' חרשים תשקל
הו עם חוטגל רל ה' פעמים רפ"ה הרי לך אלף ות' ו' פעמים ז' מב' ו'
פעמים ד' ל' ג' פעמים י' ל' סך הכל אלף ותקכ"ה ותשליך בעשירות
וישאר לך ח' והנה המולד מחורשי אב תח' לפק שהוא א' כ' תתקכ"ה
הסר ממנו כ' ה' וישאר לך ז' תשי"ה ואם תשליך בעשירות ג'
וישאר לך ג' ח' א"כ מולדך מכון ואמת והטעם שישוקלין בחוטג
מט' נותנין ה' למחזורים ולשנים פשוטות ו' למעוברות ג' לחרשים
לפי שאם תשליך יתרון המחזור שהוא כ' ותקצ"ה בעשירות ישאר
לך ה' וכן ביתרון שנה פשוטה שהוא ד' ה' תתע"ו ואם תשליכהו ב'
ישאר לך ו' וביתרון שנה מעוברת שהוא ה' כ"א תקפ"ט אם תשליכהו
ב' ישאר לך ט' וביתרון חודשי אחר שהוא א' י"ב תשי"ג אם תשליכהו
בעשירות ישאר לך ג' לכן נותנין ג' לחרשים סליק מאזני יצחק בס"ד

חישוב מולד תשרי של



ראש מחזור

2. חישוב מולד תשרי של ראש מחזור

דרך אחרת לדעת המולד

קח לך אלף שנים חמשים מחזורים וישארו בדרך חמשים שנה ולכל מאה חמשה וישארו חמשה ואחר כך עשה סאלה השנים הנשארות מחזורים וחבר הכל ודע כמה מספרם חשוב אותם כאלו הם ימים והוציאם שבעה שכעת, וידוע

- על מנת להקל על החשבון על מנת לדעת כמה מחזורים חלפו ניתן להשתמש בטבלה הבאה:

שארית (שנים)	סך מחזורים	שנים
50	50	1000
5	5	100

- האב"ע מחלק את יתרון המחזור (ב' י"ו תקצ"ה) כדלהלן:

חלק	שעה	יום
595	16	2
(540+54+1)	16	2

חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- המשך

הכל ודע כמה מספרים חשוב אותם כאלו הם ימים והוציאם שבעה שכעת, וידוע כי לכל מאה ישאר שנים ומה שישאר פחות משבעה כפלהו וזה יקרא שמור ראשון ואח"כ קח שלישית המחזורים והוציאם שבעה שבעה ומה שישאר כפלהו וזה הוא שמור שני תבררו עם השמור הראשון והנחבר הוא שמור שלישי, ואם יש

- השמור הראשון בנוי ממכפלת סך המחזורים שחלפו- M ב- 2 ימים עבור כל מחזור, מודולו שבוע, כך: $2 * M \pmod{7}$
- השמור השני מתייחס ל- 16 השעות והיות שכל 3 מחזורים 16 השעות נצברות לכדי יומים ולכן נחלק את M ב- 3 ואת השלם נכפיל ביומים, כך:
 $2 * \text{int}(M/3)$
- ונחבר לשמור הראשון כי היחידות הם ימים.

חלק	שעה	יום
595	16	2
(540+54+1)	16	2

חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- המשך

וזה הוא שמור שני תברונו עם השמור הראשון והנחבר הוא שמור שלישי, ואם יש מחזורים שלא יצאו בשלישית אם הוא אחד שים עם השמור הנ' י'ו שעות ואם שנים יום אחד גם ח' שעות עם השמור השלישי, גם קח חצי מספר כל המחזורים

- עבור השארית מהחלוקה ב- 3 עלינו לקחת 16 שעות (עבור שארית 1) או 32 שעות (עבור שארית 2), כך:
- $16(*M(\text{mod } 3))$ ביחידות של שעות.

חלק	שעה	יום
595	16	2
(540+54+1)	16	2

חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- החלקים

שנים יום אחד גם ח' שעות עם השמור השלישי, גם קח חצי כספר כל המחזורים
Sefer Ha-ibur. 1 והם

ספר העבור

והם שעות חברים עם השמור השלישי ואם יש שם חצי שעה כתוב עם השמור
השלישי בסדר החלקים ח'ק'ט' חלקים ודע כמה שעות היו מחצי כספר המחזורים
כי תחשוב כאלו היו המחזורים שעות בתשכונך וקח עשירתם והם שעות הוסיפם
על השמור השלישי ואם ישאר מה שאין לו עשירית קח ק'ח חלקים זה סימן
כי ח'ק'ל'ישראל והן לכל שעה שאין לה ק'ח וחבר החלקים עם חלקי השמור
השלישי והיסף על כל החלקים חלקים כספר המחזורים והוסף על הכל ברר' או

- 2 כפול 540 נותן 1080, אי לכך נחלק את המחזורים ל- 2 והחלק השלם נכפיל בשעה והשארית כפול 540 חלקים, כך:

חלק	שעה	יום
595	16	2
$(540+54+1)$	16	2

$$1 * \text{int}(M/2)$$

$$540 * M(\text{mod } 2)$$

חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- החלקים

שנים יום אחד גם ח' שעות עם השמור השלישי, גם קח חצי כספר כל המחזורים
Sefer Ha-ibur. 1 והם

ספר העבור

והם שעות חברים עם השמור השלישי ואם יש שם חצי שעה כתוב עם השמור
השלישי בסדר החלקים ח'ק'ט' חלקים ודע כמה שעות היו מחצי כספר המחזורים
כי תחשוב כאלו היו המחזורים שעות בתשכונך וקח עשירתם והם שעות הוסיפם
על השמור השלישי ואם ישאר מה שאין לו עשירית קח ק'ח חלקים זה סימן
כי ח'ק'ל'ישראל והן לכל שעה שאין לה ק'ח וחבר החלקים עם חלקי השמור
השלישי והיסף על כל החלקים חלקים כספר המחזורים והוסף על הכל ברר'י או

- 20 כפול 54 נותן 1080, אי לכך נחלק את המחזורים ל- 20 והחלק השלם נכפיל בשעה והשארית כפול 54 חלקים, כך:

חלק	שעה	יום
595	16	2
(540+54+1)	16	2

$$1 * \text{int}(M/20)$$

$$54 * M(\text{mod } 20)$$

חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- החלקים

שנים יום אחד גם ח' שעות עם השמור השלישי, גם קח חצי כספר כל המחזורים
Sefer Ha-ibur. 1 והם

ספר העבור

והם שעות חברים עם השמור השלישי ואם יש שם חצי שעה כתוב עם השמור
השלישי בסדר החלקים ח'ק'ט' חלקים ודע כמה שעות היו מחצי כספר המחזורים
כי תחשוב כאלו היו המחזורים שעות בתשכונך וקח עשירתם והם שעות הוסיפם
על השמור השלישי ואם ישאר מה שאין לו עשירית קח ק'ח חלקים זה סימן
כי ח'ק'ל'ישראל והן לכל שעה שאין לה ק'ח וחבר החלקים עם חלקי השמור
השלישי והוסף על כל החלקים חלקים כמספר המחזורים והוסף על הכל ברר'י או

- במקום הביטוי $M \pmod{20} * 54$ כותב האב"ע $M/2 \pmod{10} * 108$

חלק	שעה	יום
595	16	2
(540+54+1)	16	2

חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- סיכום

חלק	שעה	יום
595	16	2
(540+54+1)	16	2

day	day	h	h	p	h	p	p
$2M \pmod{7}$	$2 * \text{int}(M/3)$	$16 * M \pmod{3}$	$\text{int}(M/2)$	$540 * M \pmod{2}$	$\text{int}(M/20)$	$54 * [M \pmod{20}]$	M

- במקום הביטוי $54 * M \pmod{20}$ כותב האב"ע $108 * M/2 \pmod{10}$

day	day	h	h	p	h	p	p
$2M \pmod{7}$	$2 * \text{int}(M/3)$	$16 * M \pmod{3}$	$\text{int}(M/2)$	$540 * M \pmod{2}$	$\text{int}(M/20)$	$108 * [M/2 \pmod{10}]$	M

- החלפת האיבר $54 * M \pmod{20}$ נכונה על פי משפט בתורת המספרים שניתן להוציא גורם משותף מהבסיס ומהמחלק, כך:

$$a \pmod{b} \equiv \gcd(a,b) * \left[\frac{a}{\gcd(a,b)} \pmod{\frac{b}{\gcd(a,b)}} \right]$$

חישוב מולד תשרי של



ראש מחזור - דרך אחרת

3. חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- דרך אחרת

- רקע: האב"ע מחלק את יתרון המחזור (ב' י"ו תקצ"ה) כדלהלן:

הגודל	יום	שעה	חלק	+חלק
יתרון מחזור	ב	יו	תקצה	
יתרון שני מחזורים	ה	ט	קי	
יתרון שלושה מחזורים	א	א	תשה	
יתרון שלושה מחזורים	1	1.5	162	3



חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- דרך אחרת

תשצ"ג לדעת כל חדש שתוצה מתי יהיה מולדו.

דרך אחרת למולד קח שלישית המחזורים שעברו ואם יש מחזור אחד שאין לו שלישית קח לו בי"ו תקצ"ה ואם ישארו שנים קח ה'ט"ק'י' וקח לכל שלישית יום אחד ושעה אחת וחצי שעה ועשירית שלישית המחזורים וחצי עשיריתם והם שעות עשה מהם ימים והוציאם שבעה שבעה ואם ישאר בדרך מה שאין לו עשירית קח לכל אחד קס"ב חלקים וחבר עם הכל כמנין כל המחזורים שהיה להם שלישית חלקים וחן עם הכל ב'ה'ר"ד' אז תמצא מולד ראש המחזור,

- נסמן את מספר המחזורים שחלפו (עד ולא בכלל המחזור המבוקש) ב- M .
 - קח שלישית המחזורים שעברו ואם יש מחזור אחד שאין לו שלישית קח לו ב' י"ו תקצ"ה, ואם ישארו שניים קח ה' ט' ק"י.
- נסמן: $M/3 = a + b/3$

האות a מציינת כמה שלמים יש של שלישיות מחזורים. עבור $b=1$, לוקחים ב' י"ו תקצ"ה (יתרון מחזור), עבור $b=2$, לוקחים ה' ט' ק"י (יתרון 2 מחזורים).

חישוב מולד תשרי של ראש מחזור- דרך אחרת

תשצ"ג לדעת כל חדש שתרצה מתי יהיה מולדו.

דרך אחרת למולד קח שלישית המחזורים שעברו ואם יש מחזור אחד שאין לו שלישית קח לו ב"ו תקצ"ה ואם ישארו שנים קח ה'ט'ק"י וקח לכל שלישית ~~יום אחד~~ ושעה אחת וחצי שעה ועשירית שלישית המחזורים וחצי עשיריתם והם שעות עשה מהם ימים והוציאם שבעה שבעה ואם ישאר בדרך מה שאין לו עשירית קח לכל אחד קס"ב חלקים וחבר עם הכל כמנין כל המחזורים שהיה להם שלישית חלקים וחן עם הכל ב'ה'ר"ד או תמצא מולד ראש המחזור,

$$M/3 = a + b/3$$

$$a/10 = c + d/10$$

$$\bullet \text{ Molad RM} = a * 1d + b * 69715 + a(1d + 1.5h) + c(1.5h) + 162d + a * 3p + 57444p$$

• יש להגיה מסברא:

• למחוק "יום אחד".

• להוסיף שהיה להם שלישית שלושה חלקים.

הגודל	יום	שעה	חלק	+ חלק
יתרון מחזור	ב	י	תקצ"ה	
יתרון שני מחזורים	ה	ט	קי	
יתרון שלושה מחזורים	א	א	תשה	
יתרון שלושה מחזורים	1	1.5	162	3

ספרת היחידות של מולד



תשרי של ראש מחזור

4. ספרת היחידות של מולד תשרי של ראש מחזור

השלישי והיסקף על כל החלקים חלקים כמספר המחזורים והוסף על הכל בהר"ר או
חמצא מולד ראש המחזור, ולעולם יהיו בו ארבעה חלקים אם המחזורים זוגות יהיו
בו חשעה והסימן סרובע תחלת הזוג והנפרד ואחר שידעה [מולד]

המחזורים והוסף על הכל בהר"ר או המצא ראש המחזור —
ולעולם יהיה בו חלקים ל' אם המחזורים זוגים ואם אינם זוגים
יהיו בו ט' חסיון מרובע החלק הזוג והנפרד ואחר שידעה
ראש המחזור בדרך זה או בקח לכל מחזור ב'ו בקצה בקח ל'

ספרת היחידות של מולד תשרי של ראש מחזור

ככל הנראה כבר אברהם בר' חייא הנשיא היה מודע לזה. אבל האב"ע היה הראשון שכתב זאת במפורש.
הסבר:

מולד תשרי של ראש מחזור (נסמן ב- $R(x)$) יהיה מהצורה:

$$R(x)=[57444+(m*69715)](\text{mod } 181440)$$

כאשר בהר"ד = 57444 חלקים, יתרון מחזור = 69715 חלקים, שבוע = 181440 חלקים ו- m מספר חיובי שלם המציין את סך המחזורים השלמים שחלפו ממולד בהר"ד.

ספרת היחידות של מולד תשרי של ראש מחזור

הגורם המשותף של יתרון מחזור ושבוע הוא 5:

$$\text{Gcd}(69715, 181440) = 5$$

היות ויתרון מחזור מסתיים בספרה 5 (69715 חלקים) לכן כל כפולה שלו תסתיים בספרה אפס או 5, אם נוסיף את בהר"ד שמסתיים ב-4 חלקים נקבל שלעולם מולד תשרי של ראש מחזור יהיה מהצורה:

$$R(x) = 4 + 5x$$

כאשר x מקבל את הערכים 0 עד 36287 $\leq$ מחזוריות הלוח.

אכן עבור כל x זוגי נקבל שספרת היחידות היא 4, ועבור אי זוגי ספרת היחידות תהיה 9.

ספרת היחידות של מולד תשרי של ראש מחזור

$$R(x)=4+5x$$

אכן עבור כל x זוגי נקבל שספרת היחידות היא 4, ועבור אי זוגי ספרת היחידות תהיה 9.

ואם נאמץ את נוסח כתב היד:

”ולעולם יהיו בו חלקים ד’ אם המחזורים זוגות, ואם אינם זוגות יהיו בו ט’, והסימן מרובע תחילת הזוג והנפרד”

חלוקת השעה ל-



1080 חלקים

5. חלוקת השעה ל- 1080 חלקים

- במקורות היהודיים, השעה מחולקת ל- 1080 חלקים.
- המקור הקדום המצוי כיום לחלוקה זו הוא פיוט של ר' פינחס, מהמאה השמינית.

נְחַלְקָה הַשָּׁעָה לְתַבּוּעַ
לְאַלְף וּשְׁמֹנִים חֲלָקִים לְקַבּוּעַ

יוצר לתקופות, פנחס הכהן (אליצור פרק 9)

פיוטי רבי פינחס הכהן

ההדירה והוסיפה מבואות וביאורים
שולמית אליצור



האיגוד העולמי למדעי היהדות
קרן הרב דוד משה ועמלית רוזן
ירושלים תשס"ד

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

המשפט היסודי של האריתמטיקה

- כל מספר טבעי (שלם חיובי) יכול להיכתב כמכפלה ייחודית של מספרים ראשוניים, עד כדי שינוי הסדר של הגורמים. (הוכח ע"י גאוס בשנת 1801)

$$n = p_1^{n_1} * p_2^{n_2} * p_3^{n_3} * p_4^{n_4} * \dots * p_m^{n_m}$$

- כאשר $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_m$ נקראים המחלקים (הראשוניים) של המספר n .
- דוגמאות:

$$793 = 1 * 13 * 61$$

$$24 = 1 * 2^3 * 3^1$$

$$8 = 1 * 2^3$$

ספר העבור לאב"ע

השער השני בטעמים הוצרכו חכמי הזלזות לחלק השעה על ששים חלקים וקראו ראשונים בעבור כי יש למספר הזה חצי ושליש ורביעית גם חמישית וששית ועשירית ואין מספר פחות מזה שיש לו כל אלה החלקים וחלקו כל חלק ראשון לששים שניים וכל חלק שני לששים שלישיים ובעבור ששנת הלבנה שנ"ד יום ו'ח שעות וארבעה חומשי שעה וב' שלישיות חלק אחר מששית עשירית השעה שהם מ' חלקים שניים ערכו קדמונינו ז"ל ששים על שמונה עשר בעבור שיהיה לכל חרש חלק והנה עלה המספר אלף ושמונים ועוד אין מספר שיש לו כל החלקים חוץ מהשביעית קרוב מש"ס ובעבור שתי שלישיות החלק הוצרכו לשלש המספר הנזכר ולכפלו על שלשה להקל על התלמידים שלא יהיה להם חלקים שניים וחלקו היום על י"ב חלקים כי אין קורם שנים עשר שיש לו חצי גם שלישית ורביעית וששית רק הוא לבדו, גם אין אחריו עד מספר רב אם לא היה מורכב משנים עשר וזה המספר יקרא זוג זוג הנפרד והוא מורכב מחשבון השוה כלו בחלקיו ואם נחבר חלקיו אלה יצא החשבון השני שהוא בעשרות שהוא שוה.

רמב"ם

הלכות קידוש החודש פרק ו

ו,א בזמן שעושין על הראייה, היו מחשבין ויודעין שעה שיתקבץ בה הירח עם החמה בדקדוק הרבה, כדרך שהאצטגנינין עושין, כדי לידע אם ייראה הירח או לא ייראה. ותחילת אותו החשבון, הוא החשבון שמחשבין בקירוב ויודעין שעת קיבוצם בלא דקדוק; ושעת קיבוצם בלא דקדוק אלא במהלכם האמצעי, הוא הנקרא מולד. ועיקרי החשבון שמחשבין בזמן שאין שם בית דין שיקבעו על הראייה, והוא חשבון שאנו מחשבין היום--הוא הנקרא עיבור; ואלו הן:

ו,ב היום והלילה, ארבע ועשרים שעות בכל זמן, שתים עשרה ביום, ושתיים עשרה בלילה. **והשעה, מחולקת לאלף ושמונים חלקים; ולמה חלקו השעה למניין זה-- לפי שמניין זה יש לו חצי ורביע ושמן ושליש ושתות ותשיע וחומש ועישור, והרבה חלקים יש לכל אלו השמות.**

$$360 = 2^3 * 3^2 * 5^1$$

$$1080 = 2^3 * 3^3 * 5^1$$

©ערן רביב

ספר העבור לאב"ע

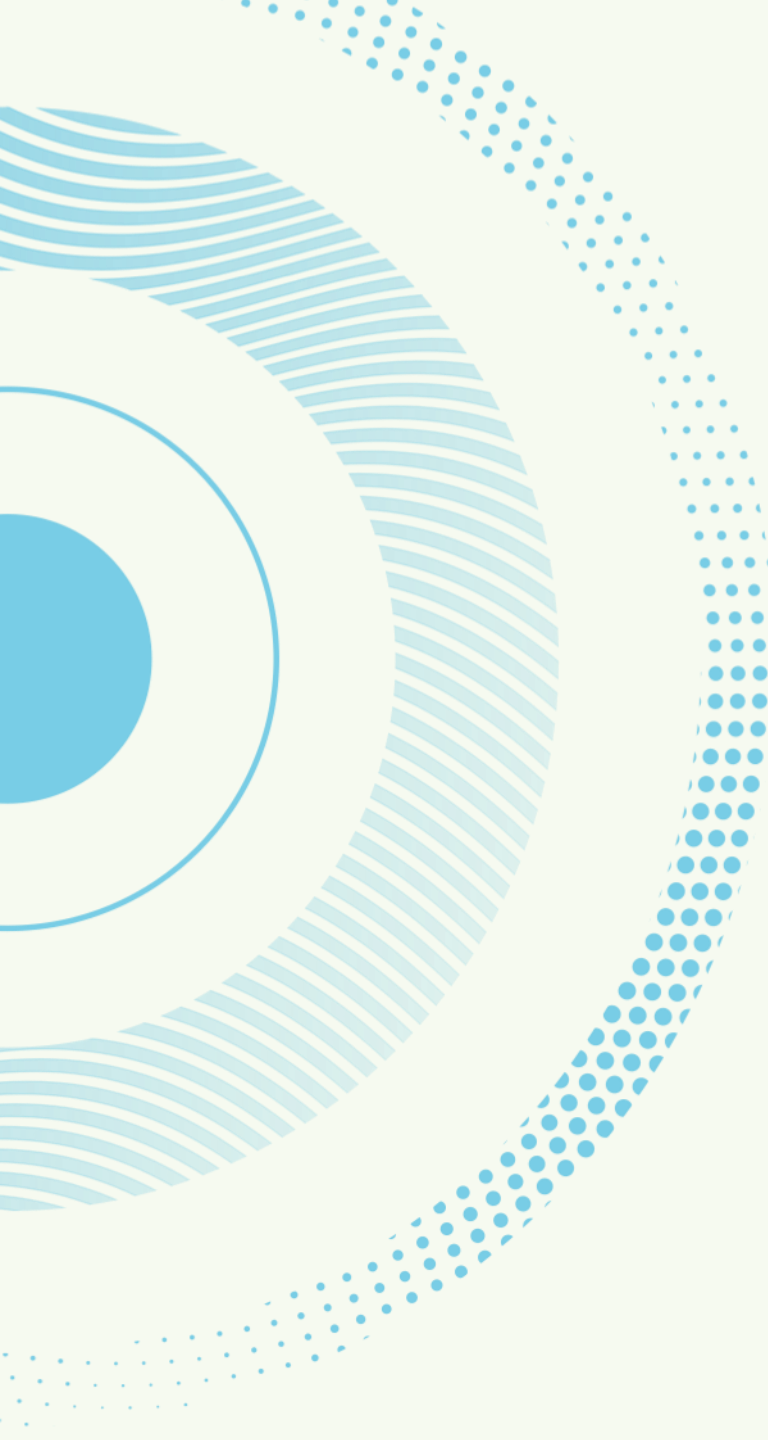
השער השני בטעמים הוצרכו חכמי הזלוח לחלק השעה על ששים חלקים וקראו ראשונים בעבור כי יש למספר הזה חצי ושליש ורביעית גם חמישית וששית ועשירית ואין מספר פחות מזה שיש לו כל אלה החלקים וחלקו כל חלק ראשון לששים שניים וכל חלק שני לששים שלישיים ובעבור ששנת הלבנה שנ"ד יום ו'ח שעות וארבעה חומשי שעה וב' שלישיית חלק אחר מששית עשירית השעה שהם מ' חלקים שניים ערכו קדמונינו ז"ל ששים על שמונה עשר בעבור שיהיה לכל חרש חלק והנה עלה המספר אלף ושמונים ועוד אין מספר שיש לו כל החלקים חוץ מהשביעית קרוב מש"ס ובעבור ~~שתי שלישיית החלק הוצרכו לשלש המספר הנזכר ולכפלו על שלשה להקל על התלמידים שלא יהיה להם חלקים שניים~~ וחלקו היום על י"ב חלקים כי אין קורם שנים עשר שיש לו חצי גם שלישית ורביעית וששית רק הוא לבדו, גם אין אחריו עד מספר רב אם לא היה מורכב משנים עשר וזה המספר יקרא זוג זוג הנפרד והוא מורכב מחשבון השוה כלו בחלקיו ואם נחבר חלקיו אלה יצא החשבון השני שהוא בעשרות שהוא שוה.

שליש $\frac{44m + \frac{1}{18}m}{60} == > \frac{264 + \frac{1}{3}}{360}$

$$1080 = 2^3 * 3^3 * 5^1$$

סיכום

- הדגמנו את הרעיונות המתמטיים החדשניים (לתקופתו) של האבן עזרא. הוא היה **הראשון על אדמת אירופה** שכתב חידושים מתמטיים שאפשריים רק בשיטה הפוזיציונאלית. הוא לא זכה למקום הראוי לו בתולדות התפתחות המתמטיקה.
- הצגנו כמה דוגמאות מהתחכום שלו בהסבריו על כללי הלוח.
- ראינו שמהדורת הדפוס מכילה שגיאות לא מעטות שנבעו בעיקר מחוסר הבנת רעיונותיו של המחבר.
- יהי רצון שנזכה להוציא לאור מהדורה מבוארת ומוערת של ספר חשוב זה.



תודה רבה!