

## תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"ו

1. הסדרה  $x_n$  מוגדרת ע"י הנוסחה  $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ , עם  $x_1 = a > 1$ . מצא את  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ .

2. נתון שאורכי הצלעות במשולש מהווים סדרה חשבונית, ואילו אורכי הגבהים מהווים סדרה הנדסית. הוכח שהמשולש הוא שווה צלעות.

3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

מטריצה מסדר  $n \times n$ , ותהי  $I$  מטריצת היחידה מאותו סדר. הוכח שהמטריצה  $I + A$  היא הפיכה ומצא את  $(I + A)^{-1}$ .

4. חשב את הרדיוס המקסימלי של מעגל החסום בחתך של האליפסואיד  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , כאשר  $a > b > c > 0$ .

5. יהיו  $a > b > 0$ , ונגדיר את הממוצע החשבוני  $A = \frac{a+b}{2}$  ואת הממוצע ההנדסי  $G = \sqrt{ab}$ .

$$\text{הוכח: } G < \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} < A$$

6. חשב את המרחק הקטן ביותר בין נקודות על הגרפים של הפונקציות  $y = x^2 - 5x + 6$  ו- $y = 1 - x$ .

7. מצא את כל הפולינומים  $P(x)$  המקיימים

$$P(x)^2 - P(y)^2 = P(x+y)P(x-y) \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}).$$

8. הוכח את אי-השוויונות  $\frac{2}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\pi + \arctg(x)}{\sqrt[3]{x^2 + 8}} dx < \frac{3}{2}$ .

9. בכד נמצאים כדורים אדומים ושחורים. ידוע שאם מוציאים שני כדורים (ללא החזרה), ההסתברות ששניהם יהיו אדומים היא 0.5. מהו המספר המינימלי של כדורים בכד? מהו המספר המינימלי של כדורים אם ידוע שמספר הכדורים השחורים הוא זוגי?

10. כדור נזרק כלפי מעלה במהירות התחלתית  $v_0$ . על הכדור פועלים כוח הכובד וגם כוח התנגדות אוויר  $kv$ , כאשר  $k > 0$  קבוע ו- $v$  היא מהירות הכדור. חשב את גובה הכדור בזמן  $t$ .

**הנה 3 חה !**