

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"ז

1. מאחד הקדקודים של משולש מורידים תיכון, גובה וחוצה-זווית לצלע הנגדית. מי משלושת הישרים נמצא בין שני האחרים? נמק.

2. מצא את כל הערכים של a שעבורם

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 - (a-1)x + 2a - 2 \geq 0$$

3. יהי l היקף האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. הוכח:

$$2\sqrt{2}(a+b) \leq l \leq \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

4. הפונקציות $f(x), g(x)$ הן מחזוריות (לאו דווקא עם אותו מחזור) ומקיימות

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

הוכח: $f(x) = g(x)$ לכל x .

5. לפולינום $P(x)$ אין אפסים ממשיים. הוכח שגם לפולינום

$$Q(x) = P(x) + \frac{P^{(2)}(x)}{2!} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \dots$$

אין אפסים ממשיים.

6. במיכל יש 100 ליטרים של תמיסת מלח, הכוללת 10 ק"ג מלח. לתוך המיכל נשפכים מים בקצב קבוע של 5 ליטרים בדקה, ומתערבבים מיד. בו זמנית נשפכת החוצה תמיסה, מתחתית המיכל, באותו קצב בדיוק. כמה מלח יישאר במיכל כעבור שעה?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \text{7. חשב:}$$

8. מטילים קוביה n פעמים. מה ההסתברות שהתוצאה 6 תתקבל מספר זוגי של פעמים?

9. א. תהינה A, B מטריצות ממשיות מסדר $n \times n$ המקיימות: $A^{-1} + B^{-1} = (A+B)^{-1}$. הוכח כי $\det(A) = \det(B)$.

ב. תן דוגמה של מטריצות כאלו עבור $n=2$.

10. הסדרה x_n מוגדרת ע"י הנוסחה $x_{n+1} = \frac{4}{x_n} + 3$, עם $x_1 > 0$. הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב

את הגבול שלה.

ה ה 3 f ח ה !