

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"ח

1. תהי Π מכפלת הקוסינוסים של 6 הזוויות הדיהדרליות בארבעון (פירמידה משולשת).

$$\text{הוכיחו: אם כל הזוויות חדות, אז } \Pi \leq \frac{1}{729}.$$

2. האם קיים מספר טבעי המורכב מספרות 2 בלבד (בכתיב עשרוני) והוא סכום של חזקות שלישיות של שלושה מספרים טבעיים עוקבים? נמקו.

3. גוף נע על ישר כך שבכל קטע של הדרך, המהירות הממוצעת בקטע שווה לממוצע שתי המהירויות בקצות הקטע. הוכיחו: תאוצת הגוף קבועה.

4. נתונה מטריצה A מסדר $m \times n$, עם $\text{rank}(A) = 1$. הוכיחו: קיימות מטריצה B מסדר $m \times 1$ ומטריצה C מסדר $1 \times n$ המקיימות: $A = BC$.

5. הוכיחו: בכל משולש, הרדיוס R של המעגל החוסם את המשולש הוא לפחות כפול מהרדיוס r של המעגל החסום במשולש: $R \geq 2r$.

6. יהי $P(x)$ פולינום ממעלה n , בעל n שורשים שונים x_1, \dots, x_n . הוכיחו: $\sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

7. מצאו פתרון (אחד לפחות) למשוואה הפונקציונלית $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$.

8. הסדרה x_n מוגדרת ע"י הנוסחה $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{125}{x_n^2}\right)$, עם $x_1 > 0$. האם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$? אם כן, מצאו אותו. נמקו.

9. נתבונן במשוואה $x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$ במשתנה x . עבור איזה ערך ממשי של הפרמטר a , שעבורו למשוואה פתרונות ממשיים, סכום ריבועי הפתרונות הוא מקסימלי?

10. הראו שקיימות סדרות (m_n) , (k_n) של מספרים טבעיים כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{m_n} - \sqrt{k_n}) = \pi$.

הנה 3 חה !