

תחרות בר-אילן במתמטיקה לסטודנטים תשע"ט

1. בפירמידה ישרה שבסיסה ריבוע, המרחק ממרכז הבסיס למקצוע צדדי הוא d והזווית בין הבסיס לבין מקצוע צדדי היא θ . מהו נפח הפירמידה?
2. שטחו של טרפז הוא 2, וסכום אורכי האלכסונים הוא 4. מהו גובה הטרפז?
3. סירת מנוע שטה מנקודה A על גדת נהר לנקודה B על הגדה השנייה. רוחב הנהר $AB = a$ ומהירות המים בו היא v , בניצב ל- AB . מהירות הסירה היא u ($u > v$), ובכל רגע נתון וקטור המהירות של הסירה הוא בכיוון B . תוך כמה זמן תגיע הסירה ל- B ?
4. מה גדול יותר, $\sin(\cos x)$ או $\cos(\sin x)$? נמקו.
5. 25 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים, מחולקים לשני כדים. בוחרים באקראי כדור אחד מכל כד. מה ההסתברות ששני הכדורים שנבחרו שחורים, אם ידוע שההסתברות ששני הכדורים לבנים היא 0.54?

6. מצאו את הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל $x \neq \pm \frac{1}{3}$ ומקיימת $f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x)$.

7. מקדמי המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ הם מספרים טבעיים אי-זוגיים. הוכיחו: שורשי המשוואה אינם רציונליים.

8. הוכיחו שהסדרה x_n המוגדרת ע"י הנוסחה $x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$, עם $x_1 = \frac{6}{7}$, מתכנסת, ומצאו את הגבול שלה.

9. חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-n + \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \{\sqrt{k}\} \right)$ כאשר $0 \leq \{x\} < 1$ הוא החלק השבור של המספר הממשי x . נתון שהגבול קיים ושונה מאפס.

10. מצאו את ערכי r שעבורם, לכל x ממשי, כל הסכומים החלקיים של $\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1} \cos(2^k x)$ הם אי-שליליים.

ה ה 3 f ח ה !